Concours National Commun d'Admission aux Grandes Ecoles d'Ingénieurs - MAROC - 1999

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

durée : 4 heures

Option TSI

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé pour cette épreuve.

* * *

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie.

Définitions et notations : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels **non nuls**. On dit que le **produit infini** $\prod_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge si la suite (P_n) définie par $(\forall\, n \in \mathbb{N}, P_n = \prod_{k=0}^{n} a_k)$ admet une **limite non nulle** dans $\mathbb{R}$.
Dans les autres cas, on dit que le produit infini $\prod_{n\in\mathbb{N}} a_n$ diverge. En cas de convergence, le réel $\lim_{k\longrightarrow+\infty} P_k$ est appelé le produit de $\prod_{n\in\mathbb{N}} a_n$, noté $\prod_{n=0}^{\infty} a_n$.
Etudier le produit infini $\prod_{n\in\mathbb{N}} a_n$ consiste à déterminer si ce produit est convergent ou divergent.
Pour $N \in \mathbb{N}$, étudier le produit infini $\prod_{n\geqslant N} a_n$ revient à étudier le produit infini $\prod_{n\in\mathbb{N}} b_n$ où l'on a posé $b_n = a_{n+N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Première partie

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels non nuls telle que $\prod_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge.
   (a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1.
   (b) Etudier la réciproque.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels > 0. Montrer que le produit infini $\prod_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ln a_n$ converge et que, dans le cas de convergence, on a : $\prod_{n=0}^{\infty} a_n = \exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} \ln\ a_n\right)$.
3. La première propriété motive l'écriture $a_n = 1+u_n$ avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, notation qui sera souvent adoptée dans la suite. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.
   (a) Montrer que la suite $P_n = \prod_{k=0}^{n}(1+u_k)$ vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}, u_0+\cdots+u_n \leqslant P_n \leqslant \exp(u_0+\cdots+u_n)$.

(b) En déduire que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge si et seulement si le produit infini $\prod_{n\in\mathbb{N}}(1+u_n)$ converge.

(c) Reprendre (b) en utilisant le résultat de la question 2.

4. Etudier les produits infinis ci-après, en précisant la valeur de leur produit en cas de convergence :
(a) $\prod_{n\in\mathbb{N}}\left(1+\frac{1}{(2n+1)(n+2)}\right)$; (b) $\prod_{n\geqslant 1} n^{\frac{\lambda}{n}}, \lambda>0$; (c) $\prod_{n\in\mathbb{N}}\left(1+x^{2^n}\right), x\in\mathbb{R}$.
(*Indication*: pour calculer les produits, en cas de convergence, on pourra : dans (a), écrire P_n comme produit de deux produits "télescopiques"; dans (c), multiplier P_n par $(1-x)$ et utiliser une identité remarquable).

5. Soit un réel $x>1$. On définit la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $\lambda_1=x$ et : $\forall\, n\geqslant 1, \lambda_{n+1}=2\lambda_n^2-1$.
Démontrer avec soin la relation

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{\lambda_n}\right)=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

(*Indication*: on pourra poser $x=ch(\theta)$ et utiliser des formules de trigonométrie hyperbolique)

Deuxième partie

1. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série numérique convergente à termes distincts de -1.

(a) Montrer l'existence d'un entier naturel N tel que : $(\forall\, n\in\mathbb{N}),\ (n\geqslant N)\Rightarrow(1+u_n>0)$.

(b) Pour $n\geqslant N$, la quantité $\ln(1+u_n)-u_n$ est donc bien définie; donnez-en un équivalent.

(c) En déduire que si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^2$ converge, le produit $\prod_{n\in\mathbb{N}}(1+u_n)$ est convergent.

2. Montrer que si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente, $\prod_{n\in\mathbb{N}}(1+u_n)$ est convergent.
(On pourra remarquer que $u_n^2\leqslant|u_n|$ à partir d'un certain rang et utiliser la question précédente).

3. Etudier le produit infini $\prod_{n\geqslant 1}(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}})$. Que peut-on en déduire ?

4. Etablir l'identité : $\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{4n^2})=\frac{2}{\pi}$.
(*Indication*: on pourra admettre la formule de Stirling suivante : $n!\sim\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$).

5. On se propose de démontrer plus généralement le développement en produit infini du sinus :

$$(\forall\, x\in]-1,1[),\qquad \prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{x^2}{n^2})=\frac{\sin\pi x}{\pi x}.$$

(a) Soit $x\in]-1,1[$; établir la convergence du membre de gauche.

(b) Soit $x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ telle que $f(t)=\cos xt$ sur $[-\pi,\pi]$.

(c) Etablir alors la relation pour tout $t\in[-\pi,\pi]$:

$$\cos xt=\frac{\sin\pi x}{\pi}\left(\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2x}{x^2-n^2}\cos nt\right).$$

(d) En déduire, pour $x \neq 0$, l'égalité :

$$\pi \ \text{cotan}\pi x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2}.$$

(e) Soit $x \in]-1,1[$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^x (\pi\text{cotan}(\pi t) - \frac{1}{t})dt$ est convergente et qu'elle vaut $\ln\left(\dfrac{\sin \pi x}{\pi x}\right)$.

(f) Soit $x \in]-1,1[$, montrer que $\forall\, t \in [0,x], \forall\, N \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \displaystyle\sum_N^{+\infty} \frac{2t}{n^2 - t^2} \leqslant \sum_N^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}$

(g) A l'aide d'une justification soignée, en déduire le développement en produit infini de $\dfrac{\sin \pi x}{\pi x}$ pour $x \in]-1,1[$.

Troisième partie

1. Montrer que la suite $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ converge vers un réel positif γ.(Constante d'Euler).

2. (a) Démontrer que pour tout $s \geqslant 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-st}}{t} dt$ est convergente et que sa valeur est égale à $\ln s$.
   (*Indication*: On pourra montrer que pour $\varepsilon > 0$ on a : $\displaystyle\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-st}}{t} dt = \int_\varepsilon^{s\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t} dt$).

   (b) Montrer alors que $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \left(e^{-t} + e^{-2t} + \cdots + e^{-nt} - \frac{e^{-t} - e^{-nt}}{t}\right) dt = \gamma$.

   (c) Déduire de la question précédente que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) e^{-t}\ dt$ converge et que sa valeur est égale à γ.

   (d) En déduire, après justification de la convergence, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t\ dt$ vaut $-\gamma$.

3. Montrer que pour tout $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est convergente.
   On note alors Γ l'application définie sur $]0, +\infty[$ par : $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,n]$ on a : $\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t}$.

5. Montrer que la fonction $x \longrightarrow xe^{-x}$ est bornée sur $[0, +\infty[$. On pose alors M=$\displaystyle\sup_{x \geqslant 0} xe^{-x}$.

6. On pose $u_n(t) = e^{-t} - (1 - \frac{t}{n})^n$, $0 \leqslant t \leqslant n$.
   (a) Trouver une fonction v_n telle que $\forall\, t \in [0,n], u_n'(t) = e^{-t} v_n(t)$.
   (b) Etudier les variations de v_n sur $[0,n]$ et en déduire qu'il existe un unique $\alpha_n \in]0,n[$ tel que $v_n(\alpha_n) = 0$.
   (c) Montrer alors que $u_n(\alpha_n) = \dfrac{\alpha_n e^{-\alpha_n}}{n}$.
   (d) Etudier les variations de u_n sur $[0,n]$ et en déduire que : $\forall\, t \in [0,n], 0 \leqslant u_n(t) \leqslant \frac{M}{n}$.

7. Soit $\varepsilon > 0$.

   (a) Montrer qu'il existe $X > 0$ tel que $\displaystyle\int_X^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \leqslant \varepsilon$.
   Un tel X sera fixé pour toute la suite de cette question.

   (b) On pose
   $$f_n(t) = \begin{cases} (1-\frac{t}{n})^n & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant n \\ 0 & \text{si } t \geqslant n \end{cases}$$
   Vérifier que f_n est continue sur $[0, +\infty[$ et que :
   $$\forall\, n \geqslant X, 0 \leqslant \int_0^X t^{x-1}e^{-t}dt - \int_0^X t^{x-1}f_n(t)dt \leqslant \frac{MX^x}{xn}$$
   .

   (c) Déduire de ce qui précède que pour $x > 0$, on a :
   $$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1}dt = \Gamma(x).$$

8. (a) Montrer que : $\forall\, n \geqslant 1, \displaystyle\int_0^n t^{x-1}(1-\frac{t}{n})^n dt = n^x \int_0^1 (1-y)^n y^{x-1}dy$.

   (b) En déduire, à l'aide d'intégrations par partie, que pour $x > 0$ on a :
   $$\Gamma(x) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

9. Montrer que pour tout $x > 0$, le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geqslant 1} \left(1+\frac{x}{n}\right)e^{\frac{-x}{n}}$ est convergent et que :
   $$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{\frac{-x}{n}}$$
   .

****

FIN